Ogólna teoria miary
Lista 2 (σ-pierścienie i σ-algebry)

Definicja. *Algebrą* podzbiorów X nazywamy pierścień podzbiorów X, do którego należy zbiór X.

Zad 1. Niech S będzie rodziną podzbiorów X. Udowodnić, że następujące warunki sa równoważne.

1) rodzina S jest algebrą ,
2) rodzina S spełnia warunek `(Suma)` oraz warunek

   `(Dopełnienie)` $\quad \forall_{A\in S} \quad A' \in S,$

   gdzie $A' = X \setminus A$ oznacza dopełnienie zbioru A,
3) rodzina S spełnia warunki `(Przekrój)` oraz `(Dopełnienie)`.

Definicja. Rodzinę S podzbiorów X spełniającą warunek `(Różnica)` oraz warunek

(σ-`Suma`) $\quad \forall_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$

nazywamy *σ-pierścieniem* podzbiorów X. Jeśli dodatkowo $X \in S$, to S nazywamy *σ-algebrą* podzbiorów X.

Zad 2. Wykazać, że każdy σ-pierścień spełnia warunek

(σ-`Przekrój`) $\quad \forall_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in S.$

Zad 3. Czy w definicji σ-pierścienia można zastąpić warunek (σ-`Suma`) warunkiem (σ-`Przekrój`)? Jak odpowiedź brzmiałaby dla σ-algebry?

Zad 4. Jaką strukturę: półpierścień, pierścień, algebrę, σ-pierścień, σ-algebrę tworzą następujące rodziny podzbiorów zbioru X ($|A|$ oznacza tu moc zbioru A):

a) $S = \{A \subset X : |A| \le 1\}$, b) $S = \{A \subset X : |A| < \aleph_0\}$, c) $S = \{A \subset X : |A| \le \aleph_0\}$,

c) $S = \{A \subset X : |A| < \aleph_0 \text{ lub } |A'| < \aleph_0\}$, e) $S = \{A \subset X : |A| \le \aleph_0 \text{ lub } |A'| \le \aleph_0\}$.

Zad 5. Sprawdzić, czy rodzina S stanowi σ-algebrę podzbiorów X, gdzie

a) $S = \{A \subset \mathbb{R}^2 : (x,y) \in A \Longrightarrow (-x,-y) \in A\}$, $X = \mathbb{R}^2$,

b) $S = \{A \subset X : A \subset \{2,3,4\} \text{ albo } A \cup \{2,4,6\}\}$, $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Definicja. Niepusty zbiór $A \in S$ nazywamy *atomem rodziny* S, jeśli z $B \in S$ i $B \subset A$ wynika, że $B = \emptyset$ lub $B = A$.

Zad 6. Wyznaczyć atomy wszystkich rodzin zbiorów z zadań 4, 5.

Zad 7. Wykazać, że przecięcie dowolnej rodziny σ-algebr (σ-pierścieni, algebr, pierścieni) jest σ-algebrą (σ-pierścieniem, algebrą, pierścieniem).

Zad 8. Pokazać, że przecięcie dwu półpierścieni nie musi być półpierścieniem.

Zad 9. Czy suma dwu σ-algebr (σ-pierścieni, algebr, pierścieni) jest σ-algebrą (σ-pierścieniem, algebrą, pierścieniem)?

Zad 10. Pokazać, że dla każdej rodziny S podziorów X istnieje najmniejsza σ-algebra (σ-pierścień, algebra, pierścień) zawierająca S, zwana σ-algebrą (σ-pierścieniem, algebrą, pierścieniem) *generowaną* (*generowanym*) przez S.